λ-calculs et catégories

Paul-André Melliès (`mellies@irif.fr`)

Premier semestre 2020-2021

Table des matières

Évaluation

L'évaluation est basée sur la présentation de 20-30 minutes d'un article de recherche qui a un lien avec le cours. En général on arrive à trouver un article de n'importe quel domaine.

TD

Les TD sont disponible à l'adresse `http://lambdacat.mimram.fr`, avec des corrigés.

1 Introduction à la théorie des catégories

Le λ-calcul peut être vu comme un élément de syntaxe, comme un programme. La logique peut être vue comme des preuves. On peut lier les deux par curry-Howard.

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{logique : raisonnement, preuves} \arrow[dll, <->, "\text{Curry-Howard}"'] \arrow[dd, <->] \\
\text{λ-calcul : syntaxe, programmes} \arrow[drr, <->, "\text{Lambek}"'] & & \\
 & & \text{catégories : algèbre}
\end{tikzcd}$$

1.1 Monoïdes et des magmas

Si on a un alphabet A, on peut définir A^* comme l'ensemble des mots finis sur l'alphabet A, ou comme le monoïde libre engendré par l'ensemble A.

Définition 1.1 — Monoïde libre

Le monoïde libre $(A^*, \cdot, \varepsilon)$ est l'ensemble A^* des mots finis sur l'alphabet A muni de l'opération $\cdot : A \times A \to A$ de concaténation et de l'unité $\varepsilon : \mathbb{1} \to A$, vue comme une opération 0-aire.

Définition 1.2 — Homomorphisme

Un homomorphisme $(M_1, m_2, e_2) \to (M_2, m_2, e_2)$ est une fonction $h : M_1 \to M_2$ qui respecte produit et unité, au sens où $h(m_1(x, y)) = m_2(hx, hy)$ et $h(e_1) = e_2$.

Proposition 1.1

Le monoïde libre $(A^*, \cdot, \varepsilon)$ est caractérisé (à isomorphisme près) par le fait que toute fonction $A \xrightarrow{f} M$, où (M, m, e) est un monoïde, s'étend de manière unique en un homomorphisme $h : (A^*, \cdot, \varepsilon) \to (M, m, e)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & M \\
A^* \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

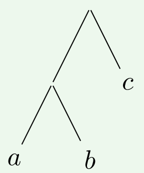
On a $\eta : a \in A \longmapsto [a] \in A^*$ et $h \circ \eta = f$. On dit que "f s'étend en h", et que le diagramme commute.

Définition 1.3 — Magma

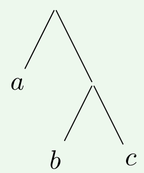
Un magma est un monoïde, mais dont l'opération n'est pas forcément associative.

Exemple 1.1 — Non associativité d'un magma

Si (A, m) est un magma, on n'impose pas que $m(m(a, b), c) = m(a, m(b, c))$. On peut visualiser ces mots avec les arbres binaires suivants.



Représentation de $m(m(a, b), c)$



Représentation de $m(a, m(b, c))$

Le magma libre engendré par un alphabet A est l'ensemble des arbres binaires de feuilles dans A.

En pratique, la construction des mots dans un langage de programmation fait que l'on peut distinguer les arbres.

1.2 Introduction des catégories

Définition 1.4 **Catégorie des ensembles**

On va voir la catégorie des ensembles comme un graphe orienté dont les sommets sont les ensembles et les arêtes des fonctions $A \xrightarrow{f} B$.[a]

[a] Voir Lawvere pour aller plus loin sur la construction des ensembles dans le contexte catégorique, à travers la théorie homotopique des types. Voir également la théorie du Topos, et Krivine (qui interprète les axiomes de la théorie des ensembles à l'aide de λ-termes).

On a une propriété intéressante qui est de pouvoir composer les arrêtes :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Dans une catégorie on peut voir plusieurs dimensions d'objets.
— dim 0 : une classe d'objets (les sommets).
— dim 1 : entre deux objets A, B. Un ensemble d'arêtes $\mathrm{Hom}(A, B)$.
— dim 2 : la loi de composition. $\circ_{A,B,C} : \mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$.
— dim 3 : l'associativité :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] & C \arrow[dr, "h"] & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g \circ f"] \arrow[rr, "h \circ (g \circ f)"] & & D \end{tikzcd} \quad \text{“}=\text{”} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "h \circ g"] & C \arrow[dr, "h"] & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[rr, "(h \circ g) \circ f"] & & D \end{tikzcd}$$

Définition 1.5 **Borne inférieure**

La borne inférieure de A et B est définie par l'élément (unique quand il existe) $a \wedge b$ tel que
1. $a \wedge b \leqslant a$ et $a \wedge b \leqslant b$
2. pour tout $x \in X$, si $x \leqslant a$ et $x \leqslant b$ alors $x \leqslant a \wedge b$.

Définition 1.6 **Produit cartésien dans une catégorie**

Un produit cartésien de deux objets A et B (quand il existe) est donné par un triplet $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ avec $\pi_1 : A \times B \to A$ et $\pi_2 : A \times B \to B$ tel que pour toute paire de flèches $X \xrightarrow{f} A$, $X \xrightarrow{g} B$ il existe une et une seule flèche $X \xrightarrow{h} A \times B$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & A \times B \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[ur, "\pi_2"] & \\ & X \arrow[u, dashed, "h"'] \arrow[uul, bend left, "f"] \arrow[uur, bend right, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Proposition 1.2

Tout ordre partiel $(X, \leqslant)$ définit une catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les éléments de X, et

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} \text{singleton si } x \leqslant y \\ \emptyset \text{ sinon.} \end{cases}$$

Preuve du proposition 1.2.

Par réflexivité on a l'identité de chaque élément.
Par transitivité on peut définir la composition, qui est associative car il existe au plus un morphisme entre les objets.

Voilà !

Remarque 1.1

Le produit cartésien définit la borne inférieure de A et B dans ce sens : c'est le plus grand des minorants.

$$\begin{tikzcd}
a & & b \\
& b \wedge b \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& x \arrow[u, dashed] \arrow[uul, bend left] \arrow[uur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Définition 1.7 **Objets isomorphes**

Deux objets X et Y sont isomorphes s'il existe une paire de fonctions $X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xrightarrow{g} X$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Définition 1.8 **Objet terminal**

Un objet A est terminal dans une catégorie $\mathcal{C}$ si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ est un singleton pour tout objet X de $\mathcal{C}$, i.e. il y a un unique morphisme $X \longrightarrow A$.
On note souvent un objet terminal $\mathbb{1}$.

Exercice 1.1

Montrer qu'il existe au plus un objet terminal dans une catégorie, à isomorphisme près.
La preuve se base sur l'unicité du morphisme $X \longrightarrow \mathbb{1}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] & \mathbb{1}' \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}'}"] & \mathbb{1} \arrow[r] & \mathbb{1}'
\end{tikzcd}$$

Définition 1.9 **Catégorie cartésienne**

Une catégorie $\mathcal{C}$ est cartésienne si :
— pour toute paire d'objets (A, B) on a un produit cartésien $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$
— on a un objet terminal $\mathbb{1}$.

Définition 1.10 **Objet somme**

Un objet somme de deux objets A et B d'une catégorie est un triplet $(A+B), i_1, i_2)$ tel que pour tout (X, f, g) il existe un unique morphisme $h : A + B \longrightarrow X$ tel que le diagramme suivant commute.
Et on a $h \circ i_1 = f$ et $h \circ i_2 = g$

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
& A + B \arrow[u, dashed, "h"'] & \\
A \arrow[ur, "i_1"'] \arrow[uur, bend left, "f"] & & B \arrow[ul, "i_2"] \arrow[uul, bend right, "g"']
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.2

Il y a un fort lien avec la logique [a].
Une preuve de $A \times B$ est une paire de preuve de A et de B.
$\mathsf{Pr}(A \vee B) = \mathsf{Pr}(A) \times \mathsf{Pr}(B)$
$\mathsf{Pr}(A \wedge B) = \mathsf{Pr}(A) + \mathsf{Pr}(B)$

a. Voir l'interprétation de la logique de Brouwer-Heyting-Kolmogorov.

Définition 1.11 — Symétrie et diagonale sur les ensembles

On a deux structures de base sur les ensembles :
— la symétrie $\begin{array}{ccc} A \times B & \longrightarrow & B \times A \\ (a,b) & \longmapsto & (b,a) \end{array}$
— la diagonale $\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \times A \\ a & \longmapsto & (a,a). \end{array}$

Définition 1.12 — Morphisme symétrie

Dans une catégorie cartésienne on a le morphisme $A \times B \xrightarrow{\mathsf{sym}_{A,B}} B \times A$ défini comme l'unique morphisme tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
& A \times B \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[ur, "\pi_2"] & \\
& B \times A \arrow[u, dashed, "\text{symétrie}"'] \arrow[uul, bend left, "\pi_2"] \arrow[uur, bend right, "\pi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Dans le cas de la catégorie des ensembles, on retrouve la définition originale.

Définition 1.13 — Morphisme diagonale

Dans une catégorie cartésienne on a le morphisme $A \xrightarrow{\mathsf{diag}_A} A \times A$ défini comme l'unique morphisme tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
A & & A \\
& A \times B \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[ur, "\pi_2"] & \\
& A \arrow[u, dashed, "\text{diagonale}"'] \arrow[uul, bend left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[uur, bend right, "\mathrm{id}_A"'] &
\end{tikzcd}$$

Dans le cas de la catégorie des ensembles, on retrouve la définition originale.

1.3 Foncteurs et transformations naturelles

1.3.1 Foncteurs

Définition 1.14 — Foncteur

Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ entre les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est défini par :
— dim 0 : F associe à chaque objet de $\mathcal{C}$ un objet de $\mathcal{D}$.
— dim 1 : pour tous A, B objets de $\mathcal{C}$, une fonction $F_{A,B} : \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & \longrightarrow & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
B & & F(B)
\end{tikzcd}
$$

— dim 2 : la conservation de la composition :

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend left, "g \circ f"] & & F(A) \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dd, bend left, "F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)"] \\
B \arrow[d, "g"'] & \longrightarrow & F(B) \arrow[d, "F(g)"'] \\
C & & F(C)
\end{tikzcd}
$$

Un foncteur doit vérifier :
— $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$
— la préservation des emballages d'identités.

Propriété 1.3

Un foncteur $F : (X, \leqslant_X) \longrightarrow (Y, \leqslant_Y)$ entre deux ensembles munis d'un (pré-)ordre est la même chose qu'une fonction croissante.

Définition 1.15 Homomorphisme

Un homomorphisme f est une fonction qui préserve la multiplication et l'unité :
— $f(m_1 \cdot m_2) = f(m_1) \cdot f(m_2)$
— $f(e_M) = f(e_N)$.

Propriété 1.4

Un foncteur $F : M \longrightarrow N$ entre deux monoïdes vus comme des catégories à un objet est un homomorphisme.

1.3.2 Transformations naturelles

On a des fonctions monotones entre deux ensembles ordonnés, et on veut les comparer.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\rotatebox{90}{$\leqslant$}"] & Y
\end{tikzcd}
$$

Définition 1.16 Ordre point à point sur les fonctions

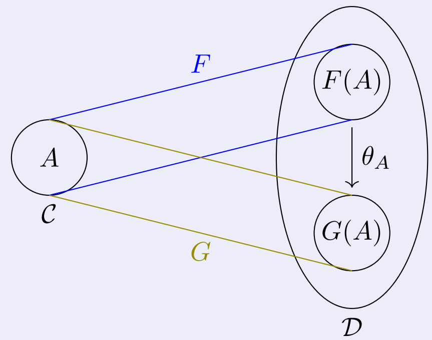
On définit un ordre sur les fonctions : $f \leqslant g$ ssi $\forall x \in X, f(x) \leqslant g(x)$.

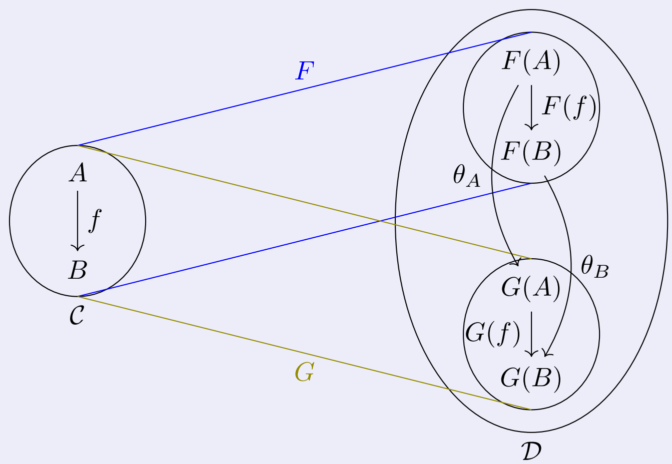
On veut étendre cette définition aux foncteurs :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

Définition 1.17 Transformation

Une transformation $\theta : F \Rightarrow G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est une famille de morphismes $F(A) \xrightarrow{\theta_A} G(A)$ paramétrée par les objets A de la catégorie $\mathcal{C}$.

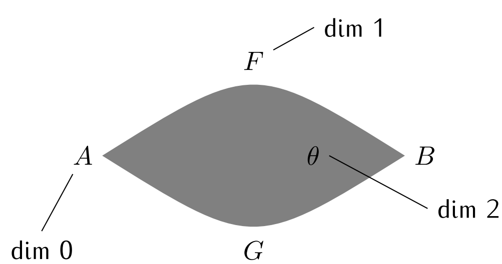




Définition 1.18 Transformation naturelle

Une transformation $\theta : F \Rightarrow G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est naturelle si le diagramme suivant commute pour tous morphismes $f : A \to B$ dans la catégorie $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\theta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\theta_B"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B)
\end{tikzcd}$$



Définition 1.19 Catégorie des catégories

On définit la catégorie **Cat** dont les objets sont les catégories et les morphismes sont les foncteurs.

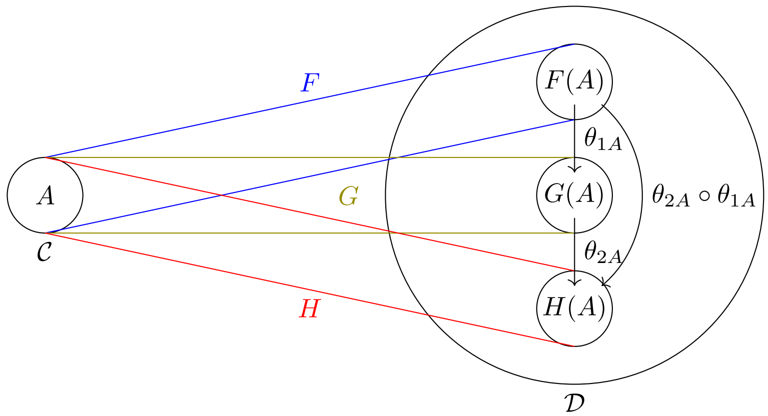
1.4 Actions

1.4.1 Composition verticale

Définition 1.20 **Composition verticale**

Pour toute toute paire $\theta_1 : F \Rightarrow G, \theta_2 : G \Rightarrow H$ de transformations on peut induire une transformation $\theta_2 * \theta_1 : F \Rightarrow H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ définie par la famille de morphismes $(\theta_2 * \theta_1)_A = \theta_{2A} \circ \theta_{1A}$, avec A un objet de $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] & \mathcal{D}
\arrow[from=1-1, to=1-2, phantom, shift left=3, "\Downarrow\theta_1"]
\arrow[from=1-1, to=1-2, phantom, shift right=3, "\Downarrow\theta_2"]
\end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\theta_{1A}"] \arrow[rr, bend right, "(\theta_2 * \theta_1)_A"'] & G(A) \arrow[r, "\theta_{2A}"] & H(A)
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.3

La transformation $(\theta_2 * \theta_1)_{A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})}$ est naturelle si θ_1 et θ_2 le sont.

Question. Si on a $A \xrightarrow{f} B$ dans $\mathcal{C}$, est-ce que le diagramme suivant commute ?

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\theta_{1A}"'] & F(B) \arrow[d, "\theta_{1B}"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\theta_{2A}"'] & G(B) \arrow[d, "\theta_{2B}"] \\
H(A) \arrow[r, "H(f)"'] & H(B)
\end{tikzcd}$$

Si θ_1 est naturelle alors $\theta_{1B} \circ F(f) = G(f) \circ \theta_{1A}$ et si θ_2 est naturelle alors $\theta_{2B} \circ G(f) = H(f) \circ \theta_{2A}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\theta_{2B} \circ \theta_{1B} \circ F(f) &= \theta_{2B} \circ G(f) \circ \theta_{1A} \\
&= H(f) \circ \theta_{2A} \circ \theta_{1A}.
\end{aligned}$$

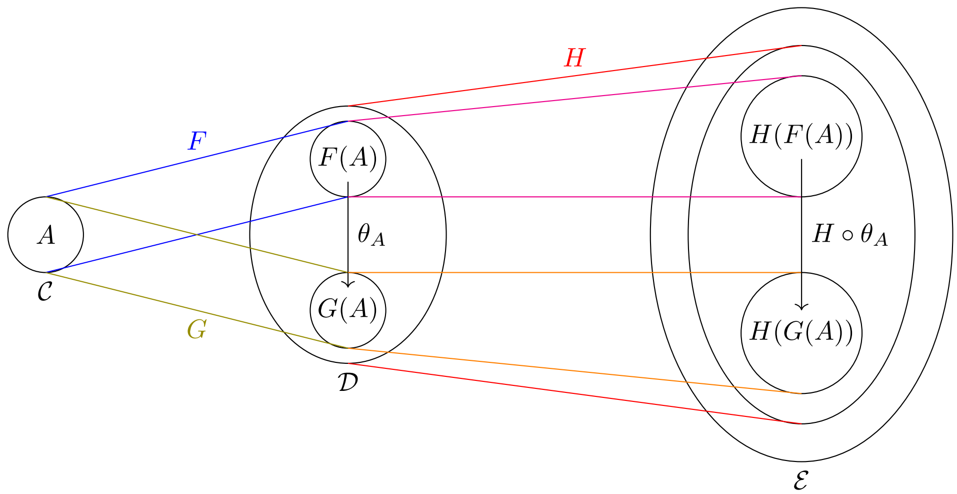
1.4.2 Action gauche (image)

Définition 1.21 **Action gauche**

Soit une transformation $\theta : F \Rightarrow G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et un foncteur $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, alors on définit la transformation $H \circ_L \theta : H \circ F \Rightarrow H \circ G : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$.
Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, $H \circ F(A) \xrightarrow{H(\theta_A)} H \circ F(B)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \arrow[r, "H"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "H \circ F"] \arrow[r, bend right, "H \circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H \circ_L \theta"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

On peut voir $H \circ_L \theta$ comme l'image de θ au long du foncteur H.



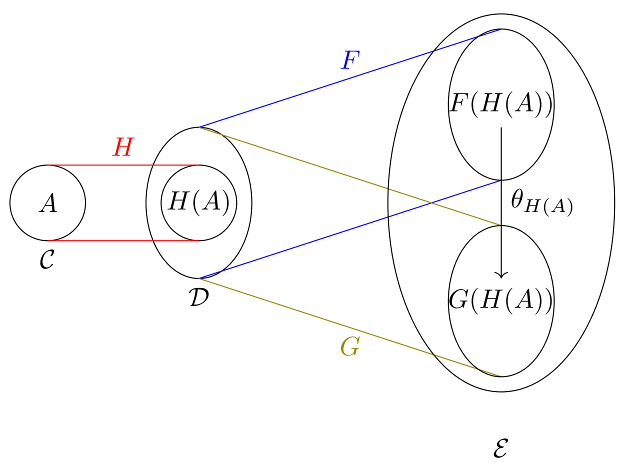
1.4.3 Action droite (substitution)

Définition 1.22 Action droite

Soit une transformation $\theta : F \Rightarrow G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ et un foncteur $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, alors on définit la transformation $\theta \circ_R H : F \circ H \Rightarrow G \circ H : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$.
Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, $\theta_{H(A)} : F \circ H(A) \longrightarrow G \circ H(A)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "H"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{E} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F \circ H"] \arrow[r, bend right, "G \circ H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta \circ_R H"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

On peut voir que l'on substitue $H(A)$ pour le paramètre B.



Remarque 1.4

On peut montrer que $H \circ_L \theta$ et $\theta \circ_R H$ sont des transformations naturelles si θ en est une.

Exemple 1.2 Exemple de transformation naturelle

1. On considère la catégorie $\mathbb{1}$ avec un objet $*$ et un morphisme (l'identité). (On notera que $\mathbb{1}$ est l'objet terminal de la catégorie $\mathbf{Cat}$.)
Pour toute catégorie $\mathcal{C}$ il y a un unique foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathbb{1}$.
Un foncteur $\mathbb{1} \xrightarrow{A} \mathcal{C}$ est la même chose qu'un objet A de $\mathcal{C}$.

Une transformation naturelle est alors la même chose qu'un morphisme de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, bend left, "A"] \arrow[r, bend right, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

2. On considère une catégorie cartésienne $\mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{produit}} & \mathcal{C} \\ (A, B) & \longmapsto & A \times B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{première composante}} & \mathcal{C} \\ (A, B) & \longmapsto & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{deuxième composante}} & \mathcal{C} \\ (A, B) & \longmapsto & B \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\text{produit}"] \arrow[r, bend right, "\text{première composante}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \pi_1"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Alors le diagramme suivant commute pour tout morphisme $(A, B) \xrightarrow{(h_A, h_B)} (A', B')$.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "h_A \times h_B"] \arrow[d, "(\pi_1)_{(A,B)}"'] & A' \times B' \arrow[d, "(\pi_1)_{(A',B')}"] \\ A \arrow[r, "h_A"] & A' \end{tikzcd}$$

3. On considère la catégorie des espaces vectoriels $\mathbf{Vect}$ et le foncteur Bidual : $V \mapsto V^{**} = (V^*)^*$, où $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$.
On peut voir * comme un opérateur de négation.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Vect} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Bidual}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathbf{Vect} \end{tikzcd}$$

On a alors une transformation naturelle $\eta_V : V \to V^{**}$ où $\eta_V(v) = \varphi \mapsto \varphi(v)$.
On peut voir $\eta_V(v)$ comme $\lambda\, \varphi.\, \varphi\, v$.
On retrouve une règle de la logique qui est que $V \Rightarrow \neg\neg V$.

1.4.4 Action de groupe

Définition 1.23 Action de groupe

Une action d'un groupe G sur un ensemble X est une fonction $G \times X \to X$ notée $(g, x) \mapsto g \cdot x$ telle que :
1. Pour tout $g_1, g_2 \in G, x \in X, g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \circ_G g_2) \cdot x$.
2. Pour tout $x \in X, e \cdot x = x$.

Définition 1.24 Catégorie des transformations

Pour $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories, on note $\mathbf{Trans}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la catégorie des transformations de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$, dont les objets sont les foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et les morphismes les transformations entre ces foncteurs.

Remarque 1.5

La catégorie $\mathbf{Trans}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ contient comme sous-catégorie la catégorie $\mathbf{Nat}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ dont les morphismes sont les transformations naturelles.
Cela signifie que $\mathbf{Nat}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ est un sous-graphe de $\mathbf{Trans}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ et hérite de la loi de composition et des identités de $\mathbf{Trans}(\mathcal{C},\mathcal{D})$.

Proposition 1.5

L'action gauche de $H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ induit un foncteur $\mathbf{Trans}(\mathcal{C},\mathcal{D}) \xrightarrow{H \circ_L -} \mathbf{Trans}(\mathcal{C},\mathcal{E})$.
L'action droite de $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ induit un foncteur $\mathbf{Trans}(\mathcal{D},\mathcal{E}) \xrightarrow{- \circ_R H} \mathbf{Trans}(\mathcal{C},\mathcal{E})$.

Pour l'action gauche :

$$\begin{aligned} H \circ_L (\theta_2 * \theta_1) &= (H \circ_L \theta_2) * (H \circ_L \theta_1) \\ H \circ_L \mathsf{Id}_F &= \mathsf{Id}_{H \circ F} \end{aligned}$$

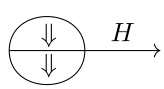
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F_1"] \arrow[r, "F_2" near start] \arrow[r, bend right=60, "F_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\theta_1"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\theta_2"] & \mathcal{D} \arrow[r, "H"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

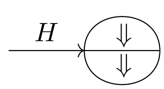
Pour l'action droite :

$$\begin{aligned} (\theta_2 * \theta_1) \circ_R H &= (\theta_2 \circ_R H) * (\theta_1 \circ_L H) \\ \mathsf{Id}_F \circ_R H &= \mathsf{Id}_{F \circ H} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "H"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=60, "F_1"] \arrow[r, "F_2" near start] \arrow[r, bend right=60, "F_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\theta_1"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\theta_2"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Cela signifie que l'on peut interpréter de manière univoque des diagrams tels que :





Ce qui montre la commutativité des actions gauches et droites avec la composition verticale.

1.4.5 Justification des nomenclatures

Pour l'action gauche. Dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \arrow[r, "H_1"] & \mathcal{E} \arrow[r, "H_2"] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

on a :

$$H_2 \circ_L (H_1 \circ_L \theta) = \underbrace{(H_2 \circ H_1)}_{\text{foncteur composé}} \circ_L \theta.$$

$$\mathsf{Id} \circ_L \theta = \theta.$$

De même pour l'action droite, dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "H_2"] & \mathcal{B} \arrow[r, "H_1"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

on a :

$$(\theta \circ_R H_1) \circ_R H_2) = \theta \circ_R \underbrace{(H_1 \circ H_2)}_{\text{foncteur composé}} .$$

$$\theta \circ_R \mathsf{Id} = \theta.$$

On a une relation de compatibilité entre les actions gauches et droites :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "H_1"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \arrow[r, "H_2"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

$$H_2 \circ_L (\theta \circ_R H_1) = (H_2 \circ_L \theta) \circ_R H_1.$$

Cela définit une sesquicatégorie, c'est à dire une 1,5-catégorie. On a la sesquicatégorie des catégories, foncteurs et tranformations. Maintenant on voudrait composer les transformations entre elles.

1.5 2-catégorie

1.5.1 Deux manières de composer

Soient les transformations suivantes :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

On voudrait les « composer ». Il y a deux manières de faire cela.

Si on applique d'abord θ_1 puis θ_2 :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad F_2 \circ_L \theta_1$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend right, "G_1"'] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \theta_2 \circ_R G_1$$

On a que $(\theta_2 \circ_R G_1) * (F_2 \circ_L \theta_1)$ définit une transformation de $F_2 \circ F_1$ vers $G_2 \circ G_1$.

Si on applique d'abord θ_2 puis θ_1 :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \theta_2 \circ_R F_1$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend right, "G_2"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad G_2 \circ_L \theta_1$$

On a que $(G_2 \circ_L \theta_1) * (\theta_2 \circ_R F_1)$ définit une transformation de $F_2 \circ F_1$ vers $G_2 \circ G_1$.

1.5.2 Règle de l'échange

Définition 1.25 **Règle de l'échange**

On dit que θ_1 et θ_2 satisfont la règle de l'échange si $(\theta_2 \circ_R G_1) * (F_2 \circ_L \theta_1) = (G_2 \circ_L \theta_1) * (\theta_2 \circ_R F_1)$, c'est à dire si le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\theta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\theta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Exemple 1.3 **Exemple de non satisfaction de la règle de l'échange**

La règle de l'échange n'est pas toujours satisfaite :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, bend left, "A"] \arrow[r, bend right, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Exercice 1.2 **Caractérisation de la satisfaction de la règle de l'échange**

Montrer qu'une transformation θ_2 satisfait la règle de l'échange avec toute transformation θ_1 ssi θ_2 est naturelle.

1.5.3 2-catégorie

Définition 1.26 **2-catégorie**

Une 2-catégorie est une sesquicatégorie dans laquelle la règle de l'échange est toujours satisfaite.

Cela signifie que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_2"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

induit une 2-cellule de manière univoque. $\theta_2 \circ \theta_1$ est défini par la 2-cellule suivante :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F_2 \circ F_1"] \arrow[r, bend right, "G_2 \circ G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta_2 \circ \theta_1"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Dans notre cas, $\theta_2 \circ \theta_1$ est la transformation naturelle définie par :

$$(\theta_2 \circ \theta_1)_{A \in \mathsf{Obj}(\mathcal{A})} : F_2 \circ F_1(A) \longrightarrow G_2 \circ G_1(A).$$

$$\begin{tikzcd} & F_2 \circ G_1(A) \arrow[dr, "\theta_{2G_1(A)}"] & \\ F_2 \circ F_1(A) \arrow[ur, "F_2 \circ_L \theta_{1A}"] \arrow[dr, "\theta_{2F_1(A)}"'] & & G_2 \circ G_1(A) \\ & G_2 \circ F_1(A) \arrow[ur, "G_2 \circ_L \theta_{1A}"'] & \end{tikzcd}$$

Ce qui montre que l'on a une 2-catégorie **Cat** dont :
— les objets sont les catégories
— les morphismes sont les foncteurs
— les 2-cellules sont les transformations.

1.6 Adjonction entre catégories

Proposition 1.6

Soient A et B deux ensembles et $L : A \to B$ et $R : B \to A$ deux fonctions.
Montrer que les deux assertions suivantes sont équavalentes.
1. L et R sont des bijections et $R = L^{-1}$
2. $\forall a \in A, \forall b \in B, L(a) =_B b \Leftrightarrow a =_A R(b)$

Preuve du proposition 1.6.

$1 \Rightarrow 2$ découle directement du fait que $R = L^{-1}$.
Pour montrer $2 \Rightarrow 1$, on utilise la reflexivité de l'égalité et on montre que $L \circ R$ et $R \circ L$ sont les identités.

Youpi !

On a donc que la notion de bijection se ramène à l'équivalence 2.

Définition 1.27 — Adjonction

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories et $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ deux foncteurs.
Une adjonction entre L et R est une famille de bijections $\phi_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, R(B))$ naturelles dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.
Si L et R sont en adjonction on note $L \dashv R$.

Remarque 1.6

Une adjonction entre ensembles vus comme des catégories est une bijection.

Exemple 1.4

On considère la catégorie des ensembles $\mathbf{Set}$ et la catégorie $\mathbf{Vect}$ des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Vect} \arrow[l, bend left, "R = U"] \end{tikzcd}$$

R est le foncteur d'oubli U qui « oublie » la structure d'espace vectoriel et envoie tout espace vectoriel sur son support $U(V)$.

$$\underset{\text{application linéaire}}{V \xrightarrow{\quad f \quad} W} \qquad \underset{\text{fonction}}{U(V) \xrightarrow{\quad U(f) \quad} U(W)}$$

Proposition 1.7

Il existe une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vect}}(\mathbb{K}X, V)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{K}X$ vers V, et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, U(V))$ l'ensemble des fonctions de X dans V.

$$\phi_{X,V}(f : \mathbb{K}X \to V) : \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathbb{K}X & \xrightarrow{f} & V \\ x & \longmapsto & e_x & \longmapsto & f(e_x) \end{array}$$

Preuve du proposition 1.7.

La preuve est laissée en exercice.

C'est ce que je voulais !

Exemple 1.5

On considère la catégorie des ensembles $\mathbf{Set}$ et la catégorie $\mathbf{Mon}$ des monoïdes et des homomorphismes.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, bend left, "L = \text{libre}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Mon} \arrow[l, bend left, "R = U"] \end{tikzcd}$$

R est le foncteur d'oubli $(M, \cdot_M, e_M) \longmapsto M$.
L est le constructeur libre $A \longmapsto (A^*, \cdot_A, \varepsilon)$.

Proposition 1.8

Il existe une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}(A^*, M)$ l'ensemble des homomorphisme de $(A^*, \cdot_A, \varepsilon)$ vers $(M, \cdot_M, e_m)$, et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, U(M))$ l'ensemble des fonctions de A dans M.

Preuve du proposition 1.8.

Pour toute fonction $f : A \to M$, il y a un unique homomorphisme $f^{\dashv}$ faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[r, "f^{\dashv}"] & M \\ A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

On a $f^{\dashv} : a_1 \cdots a_n \mapsto f(a_1) \cdots f(a_n)$ et $f^{\dashv} : \varepsilon \mapsto e_M$.

Voilà !

Proposition 1.9

Toute adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{B} \arrow[l, bend left, "R"] \end{tikzcd}$$

induit :
1. une famille de morphismes $\eta_A : A \to R(L(A))$ dans $\mathcal{A}$, indexée par les objets A de $\mathcal{A}$
2. une famille de morphismes $\varepsilon_B : B \to L(R(B))$ dans $\mathcal{B}$, indexée par les objets B de $\mathcal{B}$

Preuve du proposition 1.9.

1. Pour tout objet A de la catégorie $\mathcal{A}$, il y a un morphisme $L(A) \xrightarrow{\mathrm{id}_{L(A)}} L(A)$ dans $\mathcal{B}$, donc $\phi_{A,L(A)}(\mathrm{id}_{L(A)}$ définit un morphisme, noté $\eta_A)$ $A \longrightarrow R(L(A))$ dans $\mathcal{A}$.
2. Pour tout objet B de $\mathcal{B}$, $R(B) \xrightarrow{\mathrm{id}_{R(B)}} R(B)$ dans $\mathcal{A}$ induit $\phi_{R(B),B}(\mathrm{id}_{R(B)} : L(R(B)) \longrightarrow B$ dans $\mathcal{B}$.

cskifo

Exemple 1.6

Dans le cas de

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, bend left, "\text{libre}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Mon} \arrow[l, bend left, "U"] \end{tikzcd}$$

on a :

$$\eta_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A^* \\ a & \longmapsto & a \end{array}$$

$$\varepsilon_M : \begin{array}{ccc} M^* & \longrightarrow & M \\ m_1 \cdots m_k & \longmapsto & m_1 \cdot_M \cdots \cdot_M m_k \\ \varepsilon & \longmapsto & e_M \end{array}$$

pour tout monoïde M.

Remarque 1.7

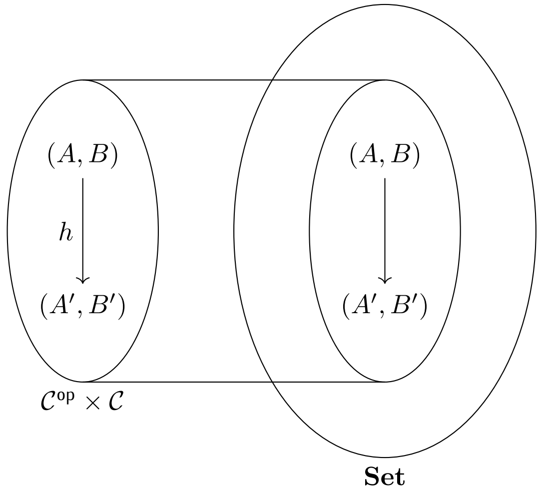
η et ε sont des transformations naturelles. On a $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow R \circ L$ et $\varepsilon : L \circ R \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$.

Proposition 1.10

Toute catégorie $\mathcal{C}$ induit une fonction $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}} \mathbf{Set}$.

Preuve du proposition 1.10.

On doit envoyer chaque paire (A, B) d'objets de $\mathcal{C}$ dans un ensemble $\mathrm{Hom}(A, B)$, qui est l'ensemble des morphismes de A dans B dans $\mathcal{C}$.



$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h_A"'] \\ A' \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} A \\ A' \arrow[u, "h_A"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[d, "h_B"] \\ B' \end{tikzcd} \qquad \longmapsto \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(h_A,h_B)"] \\ \mathrm{Hom}(A',B') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_A"'] & B \arrow[d, "f"] \\ A' \arrow[r, "g"'] & B' \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ — dans $\mathcal{C}$ — dans $\mathcal{C}$ — $\mathrm{Hom}(h_A, h_B) : f \mapsto h_B \circ f \circ h_A$

Voilà !

Proposition 1.11

Tout foncteur $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ induit un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(L(A), B) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} A \\ A' \arrow[u, "h_A"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[d, "h_B"] \\ B' \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} L(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "L \circ h_A"'] & B \arrow[d, "f"] \\ L(A') \arrow[r, "g"'] & B' \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{A}$ — dans $\mathcal{B}$

Proposition 1.12

De même, tout foncteur $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ induit un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L(A), B) \end{array}$$

Donc étant donnée une paire de foncteurs $\mathcal{A} \xrightarrow{L} \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \xrightarrow{R} \mathcal{A}$, on a deux foncteurs de $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B}$ dans **Set**.

La famille $\phi_{A,B}$ est naturelle, cela signifie que ϕ définit une transformation naturelle entre les deux foncteurs $\mathcal{B}(L \circ -, -)$ et $\mathcal{A}(-, - \circ R)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{B} \arrow[rr, bend left, "(A,B) \mapsto \mathcal{B}(L(A),B)"] \arrow[rr, phantom, "\phi"] & & \mathbf{Set} \arrow[ll, bend left, "(A,B) \mapsto \mathcal{A}(A,R(B))"] \end{tikzcd}$$

Cela signifie que le diagramme suivant commute !

$$
\begin{tikzcd}
A & B \arrow[d, "h_B"] \\
A' \arrow[u, "h_A"] & B'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(L(A), B) \arrow[r, "\phi_{A,B}"] \arrow[d, "h_B \circ - \circ L \circ h_A"'] & \mathcal{A}(A, R(B)) \arrow[d, "R \circ h_B \circ - \circ h_A"] \\
\mathcal{B}(L(A'), B') \arrow[r, "\phi_{A',B'}"'] & \mathcal{A}(A', R(B'))
\end{tikzcd}
$$

dans $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$

Donc pour tout $f : L(A) \to B$ dans $\mathcal{B}$,

$$R \circ h_B \circ (\phi_{A,B} \circ f) \circ h_A = \phi_{A',B'}(h_B \circ f \circ L \circ h_A)$$

$$
\begin{tikzcd}
L(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "L \circ h_A"'] & B \arrow[d, "h_B"] \\
L(A') \arrow[r, "g"'] & B'
\end{tikzcd}
\quad\text{———}\quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi_{A,B}(f)"] \arrow[d, "h_A"'] & R(B) \arrow[d, "R \circ h_B"] \\
A' \arrow[r, "\phi_{A',B'}(g)"'] & R(B')
\end{tikzcd}
$$

Définition 1.28 **Catégorie cartésienne close**

Une catégorie cartésienne close est une catégorie cartésienne $(\mathcal{C}, \times, \mathbb{1})$ telle que pour tout objet A de $\mathcal{C}$, le foncteur $A \times - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ a l'adjoint droit $A \Rightarrow - : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. C'est à dire qu'il existe une adjonction $A \times - \dashv A \Rightarrow -$, où $A \times - : B \mapsto A \times B$.

$$
\begin{tikzcd}
A' & B' \\
A \arrow[u, "h_A"] & B \arrow[u, "h_B"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A' \arrow[d, "h_A"] & A' \times B' \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B' \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[u, "h_A \times h_B"] & B \arrow[u, "h_B"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A & A \times B' \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B' \\
 & & B \arrow[u, "f'"'] \\
 & A \times B \arrow[uul, bend left, "\pi_1"] \arrow[uu, "A \times f"] \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

2 La catégorie cartésienne close libre et le λ-calcul

2.1 La catégorie cartésienne libre

Définition 2.1 **Inf-treillis**

Un inf-treillis $(A, \leqslant, \wedge, \top)$ est un ensemble partiellement ordonné A tel que pour tous éléments a_1 et a_2, $a_1 \wedge a_2$ est le plus grand minorant de a_1 et a_2, et $\top$ est un maximum.

Proposition 2.1

Soient A et B deux inf-treillis.
Toute fonction croissante $f : A \to B$ vérifie :

$$
\begin{array}{rrcl}
\forall a_1, a_2 \in A, & f(a_1 \wedge a_2) & \leqslant_B & f(a_1) \wedge f(a_2) \\
 & f(\top_A) & \leqslant_B & \top_B
\end{array}
$$

On a un résultat similaire avec les catégories cartésiennes.

Proposition 2.2

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories cartésiennes et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur.
Alors il existe une famille de morphismes

$$
\begin{array}{rrcl}
m_{A_1,A_2} : & F(A_1 \times_{\mathcal{A}} A_2) & \longrightarrow & F(A_1) \times_{\mathcal{B}} F(A_2) \\
m_\top : & F(\top_{\mathcal{A}}) & \longrightarrow & \top_{\mathcal{B}}
\end{array}
$$

naturels dans A_1, A_2.

Preuve du proposition 2.2.

Soient A_1, A_2 dans $\mathcal{A}$. Le morphisme m_{A_1,A_2} est défini par l'unique morphisme faisant commuter le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
A_1 & & A_2 \\
& A_1 \times A_2 \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad \overset{F}{\longmapsto} \qquad
\begin{tikzcd}
A_1 & & A_2 \\
& F(A_1) \times F(A_2) \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[ur, "\pi_2"] & \\
& F(A_1 \times_{\mathcal{A}} A_2) \arrow[u, "m_{A_1,A_2}"'] \arrow[uul, bend left, "F(\pi_1)"] \arrow[uur, bend right, "F(\pi_2)"'] &
\end{tikzcd}
$$

Youpi !

Définition 2.2 Foncteur cartésien

Un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre deux catégories cartésiennes est dit cartésien si les morphismes canoniques

$$
\begin{array}{rrcl}
m_{A_1,A_2} : & F(A_1 \times_{\mathcal{A}} A_2) & \longrightarrow & F(A_1) \times_{\mathcal{B}} F(A_2) \\
m_{\top} : & F(\top_{\mathcal{A}}) & \longrightarrow & \top_{\mathcal{B}}
\end{array}
$$

sont des isomorphismes.

Exemple 2.1 Exemples de foncteurs non cartésiens

— Soit A un ensemble ayant au moins deux éléments. Alors

$$
A \times - : \begin{array}{ccc} \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ B & \longmapsto & A \times B \end{array}
$$

définit un foncteur

$$
m_{A_1,A_2} : A \times (A_1 \times A_2) \longrightarrow (A \times A_1) \times (A \times A_2)
$$

qui n'est pas un isomorphisme.

— Soit un foncteur constant $F : A \mapsto K$. Alors $m_{A_1,A_2} : K \to K \times K$ n'est pas un isomorphisme en général.

Exemple 2.2 Exemples de foncteurs cartésiens

— Le foncteur identité

— Soient deux foncteurs $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ équipé d'un isomorphisme naturel $\theta : F \Rightarrow G$ ($\theta_A : F(A) \to G(A)$ est un isomorphisme).

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
$$

Alors F est cartésien ssi G l'est.

Preuve du proposition 2.2.

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[rrr, "\theta_{A_1}"] & & F(A_2) \arrow[rrr, "\theta_{A_2}"] & G(A_1) & & G(A_2) \\
& F(A_1) \times F(A2) \arrow[ul, "F(\pi_1)"] \arrow[ur, "F(\pi_2)"'] \arrow[rrr, "\theta_{A_1 \times A_2}"] & & & G(A_1) \times G(A2) \arrow[ul, "G(\pi_1)"] \arrow[ur, "G(\pi_2)"'] & \\
& F(A_1 \times A2) \arrow[u, "m^F_{A_1,A_2}"'] \arrow[uul, bend left] \arrow[uur, bend right] \arrow[rrr, "\theta_{A_1} \times \theta_{A_2}"] & & & G(A_1 \times A2) \arrow[u, "m^G_{A_1,A_2}"'] \arrow[uul, bend left] \arrow[uur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Et le diagramme suivant commute par propriété universelle.

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \times F(A2) \arrow[r, "\theta_{A_1 \times A_2}"] & G(A_1) \times G(A2) \\
F(A_1 \times A2) \arrow[u, "m^F_{A_1,A_2}"] \arrow[ur, bend left, "h"] \arrow[ur, bend right, "h'"] \arrow[r, "\theta_{A_1} \times \theta_{A_2}"'] & G(A_1 \times A2) \arrow[u, "m^G_{A_1,A_2}"']
\end{tikzcd}$$

Youpi !

— Autre exemple : le diagramme suivant commute ssi θ_{A_1}, θ_{A_2} et $\theta_{A_1 \times A_2}$.

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \times F(A2) \arrow[r, "\theta_{A_1 \times A_2}"] & G(A_1) \times G(A2) \\
F(A_1 \times A2) \arrow[u, "m^F_{A_1,A_2}"] \arrow[r, "\theta_{A_1} \times \theta_{A_2}"'] & G(A_1 \times A2) \arrow[u, "m^G_{A_1,A_2}"']
\end{tikzcd}$$

Donc $m^F_{A_1,A2}$ est un iso ssi $m^G_{A_1,A2}$ l'est.

Exemple 2.3 **Exemple fondamental**

Soit une catégorie $\mathcal{A}$ équippée d'un produit cartésien $\times$ et d'un objet terminal 1.
Soit la même catégorie équipée d'un produit cartésien $\otimes$ et d'un objet terminal $\mathbb{1}$.
Alors le foncteur identité $(\mathcal{A}, \times, 1) \longrightarrow (\mathcal{A}, \otimes, \mathbb{1})$ est cartésien.

2.2 La catégorie cartésienne libre

Proposition 2.3

Soit une catégorie $\mathcal{A}$.
Il existe une catégorie cartésienne $\mathsf{cart}(\mathcal{A})$ (ou $\mathsf{Fam}(\mathcal{A})$) et un foncteur $\mathsf{incl}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathsf{cart}(\mathcal{A})$ tel que pour tout foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ avec $\mathcal{M}$ une catégorie cartésienne, il existe un foncteur cartésien

$$F^\dagger : \mathsf{cart}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{M}$$

tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{cart}(\mathcal{A}) \arrow[r, dashed, "F^\dagger"] & \mathcal{M} \\
\mathcal{A} \arrow[u, "\mathsf{incl}_{\mathcal{A}}"] \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, dashed, "f^\dagger"] & M \\
A \arrow[u, "\eta"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

De plus $F^\dagger$ est unique jusqu'à isomorphisme près.

L'explication est que si le diagramme suivant commute,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{cart}(\mathcal{A}) \arrow[r, "H \text{ cartésien}"] & \mathcal{M} \\ \mathcal{A} \arrow[u, "\mathrm{incl}_{\mathcal{A}}"] \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

alors il existe un unique morphisme naturel $\theta : H \Rightarrow F^\dagger$ tel que $\theta \circ \mathrm{incl} = \mathrm{id}_F$.

Pour tout $W \in \mathrm{Ob}(\mathrm{cart}(\mathcal{A}))$, θ_W est un isomorphisme et $\theta_{\mathrm{incl}_{\mathcal{A}}} = \mathrm{id}_{F(A)}$ pour tout objet A de $\mathcal{A}$.

Preuve du proposition 2.3.

L'idée est que cart($\mathcal{A}$) va avoir des mots finis d'objets de $\mathcal{A}$ comme objets.
On va écrire $A_1 A_2 \cdots A_n$ par $(A_i)_{i\in I}$, la famille des objets de $\mathcal{A}$ avec $I = [\![1, n]\!]$.
Le morphisme

$$(A_i)_{i\in I} \longrightarrow (B_j)_{j\in J}$$

est des paires consistant en :
— un foncteur $\varphi : J \to I$
— une famille de morphismes $f_j : A_{\varphi(j)} \to B_j$.
Montrons que cart($\mathcal{A}$) est cartésien.
Soient deux objets $\underline{A} = (A_i)$ et $\underline{B} = (B_j)$ de cart($\mathcal{A}$). On définit alors $\underline{A} \times \underline{B} = (C_k)_{k\in I+J}$ comme la concaténation des deux mots.

Le foncteur

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{incl}} \mathrm{cart}(\mathcal{A})$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & {[A]} \text{ (singleton)} \arrow[d, "{[f]}"] \\ B \arrow[r, mapsto] & {[B]} \end{tikzcd}$$

est défini par $[A] \longmapsto [B]$.

Voilà !

Une autre manière de représenter les morphismes est

$$\underbrace{x_1 : \overset{A_1\wedge\cdots\wedge A_p}{A_1}, \ldots x_p : A_p}_{[A_1,\ldots,A_p]} \vdash \underbrace{(x_{\varphi_1}, \ldots, x_{\varphi_p})}_{\text{mots de termes}} : B_1 \wedge \cdots \wedge B_q$$

avec $\varphi : [\![1, q]\!] \to [\![1, p]\!]$.

cart($\mathcal{A}$) peut être vue comme la catégorie des démonstrations.

3 Introduction au λ-calcul

Le λ-calcul est une syntaxe pour les fonctions.

On a un ensemble $\mathcal{V}$ infini dénombrable de variables.
On veut pouvoir appliquer une fonction M à un argument N, donc construire App(M, N).
On veut, à partir d'un terme M pouvoir construire une fonction $x \mapsto M$, où x peut apparaître dans M.

3.1 λ-termes

On définit une grammaire pour les λ-termes :

$$M ::= \quad x \in \mathcal{V} \quad | \quad \mathrm{App}(M, N) \quad | \quad \lambda x.M$$

Exemple 3.1 **Fonction identité**

$\lambda x.x$ est la fonction identité

Exemple 3.2 **Fonction application**

$\lambda f.\lambda x.\mathsf{App}(f, x)$ est la fonction qui prend deux arguments et applique le premier au second.

On voudrait que les termes $\lambda x.x$ et $\lambda y.y$ soient considérés comme égaux dans la syntaxe du λ-calcul.

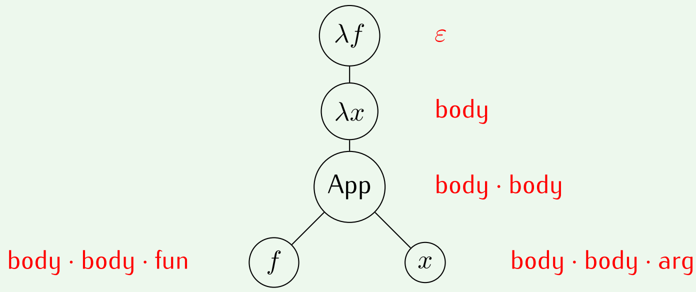
Définition 3.1 **Occurence**

On définit par induction les occurences d'un λ-terme par :
— $\mathsf{occ}(x) = \{\varepsilon\}$
— $\mathsf{App}(M, N) = \{\varepsilon\} \uplus \{\mathsf{fun} \cdot o \,|\, o \in \mathsf{occ}(M)\}, \uplus\{\mathsf{arg} \cdot o \,|\, o \in \mathsf{occ}(N)\}$
— $\mathsf{occ}(\lambda x.M) = \{\varepsilon\} \uplus \{\mathsf{body} \cdot o \,|\, o \in \mathsf{occ}(M)\}$

L'occurence est un mot sur l'alphabet $\{\mathsf{fun}, \mathsf{arg}, \mathsf{body}\}$

Exemple 3.3

On considère $\lambda f.\lambda x.\mathsf{App}(f, x)$.



3.2 Variable close ou non

On définit des fonctions $\mathsf{occ}_{\mathsf{var}}$, $\mathsf{occ}_{\mathsf{App}}$ et occ_{λ} qui associent à un terme son occurence si le nœud est labellisé par l'indice.

On définit alors pour chaque λ-terme une fonction binder : $\mathsf{occ}_{\mathsf{var}}(M) \to \mathsf{occ}_{\mathsf{var}}(M) \uplus \mathcal{V}$ qui associe à chaque occurence d'une variable M :

— l'occurence du nœud λ qui l'associe

—

On a

1. $M = x$ où ε est l'occurence de la variable, $\mathsf{binder}(\varepsilon) = x \in \mathcal{V}$.
Cela signifie que l'occurence de x à la racine est libre (car $\mathsf{binder}(\varepsilon)$ est une variable).

2. $P = \mathsf{App}(M, N)$, où o est une occurrence d'une variable de P.
On a deux cas : $o = \mathsf{fun} \cdot o'$ ou $o = \mathsf{arg} \cdot o'$.
Dans le premier cas, $\mathsf{binder}(\mathsf{fun} \cdot o) = x \in \mathcal{V}$ si l'occurence de la variable est libre, $\mathsf{binder}(\mathsf{fun} \cdot o) = \mathsf{fun} \cdot \mathsf{binder}(o)$ si l'occurence de la variable est close.

3. $\lambda x.M$ (le cas intéressant). On a l'occurrence o d'une variable dans M.
Si l'occurrence est close dans M : $\mathsf{binder}_{\lambda x.M}(\mathsf{body} \cdot o) = \mathsf{body} \cdot \mathsf{binder}_M(o)$.
Si $\mathsf{binder}(o) \in \mathcal{V}$ il se passe quelque chose d'intéressant : $\mathsf{binder}_{\lambda x.M}(\mathsf{body} \cdot o) = \varepsilon$. Le binder de l'occurrence de x est au λ à la racine.
Si $\mathsf{binder}_M(o) = y \in \mathcal{V}$ et $y \neq x$ alors $\mathsf{binder}_{\lambda x.M}(\mathsf{body} \cdot o) = y$. L'occurrence de la variable y reste libre.

Exemple 3.4

$\lambda x.x$

Remarque 3.1

Dès que l'occurrence d'une variable x est bornée dans un λ-terme M alors :
1. $\mathsf{binder}_M(o_x)$ est l'occurrence d'un nœud labellisé λx.

2. L'occurrence $\text{binder}_M(o_x)$ est un prefixe de l'occurrence o_x.

Définition 3.2 **α-équivalence**

Deux λ-termes M et N sont α-équivalents quand :
1. $\text{occ}(M) = \text{occ}(N)$
2. $\text{binder}_M = \text{binder}_N$
On note alors $M \sim_\alpha N$

On dit traditionnellement que deux termes équivalents sont égaux.

Exemple 3.5

$$\lambda x.x \sim_\alpha \lambda y.y$$
$$\lambda y.\lambda y.x \sim_\alpha \lambda u.\lambda v.u$$
$$\lambda x.\lambda x.x \sim_\alpha \lambda x.\lambda y.y$$

3.3 β-réécriture

On a vu les occurrences des λ-termes. Maintenant on veut les réécrire en utilisant l'intuition qu'une fonction $\lambda x.M$ est appliquée à un argument N.

On va définir une β-règle via une notion de substitution.

Définition 3.3 **Substitution (sans capture)**

On définit la substitution par induction sur le λ-terme M :
— $x[x := N] = N$
— $y[x := N] = y$ si $y \neq x$
— $\text{App}(P, Q)[x := N] = \text{App}(P[x := N], Q[x := N])$
— $(\lambda y.M)[x := N] = \lambda y.M[x := N]$ si $y \neq x$ et y n'est pas une variable libre de N.
On est obligés d'avoir que y n'est pas libre dans N sinon si on a un $\lambda y.$ avant on pourrait le réécrire. En pratique on peut alpha-renommer avec une variable fraîche et cela ne pose aucun souci.

Exemple 3.6

$(\lambda y.x)[x := \text{App}(f, z)] = \lambda y.\text{App}(f, z)$ si $f \neq y$ et $z \neq y$
$(\lambda y.x)[x := \text{App}(f, y)] = \lambda z.\text{App}(f, y)$ où $z \neq y$

Définition 3.4 **β-règle**

$\text{App}(\lambda x.M, N) \underset{\beta\text{-règle}}{\longrightarrow} M[x := N]$

Exemple 3.7 **Fonction identité**

$\text{App}(\lambda x.x, N) \xrightarrow{\beta} x[X := N] = N$
Cela justifie que l'on appelle $\lambda x.x$ la fonction identité.

Exemple 3.8 **Projection**

Soit $K = \lambda x.\lambda y.x$.
$\text{App}(\text{App}(K, P), Q) \xrightarrow{\beta} \text{App}(\lambda y.P, Q) \xrightarrow{\beta} P$

Remarque 3.2

Souvent on écrira $K\,P\,Q$ pour $\text{App}(\text{App}(K, P), Q)$

Définition 3.5 **Duplicateur**

Soit $\Delta = \lambda x.\mathsf{App}(x,x)$.
$\mathsf{App}(\Delta, P) \xrightarrow{\beta} \mathsf{App}(P,P)$
$\Omega = \mathsf{App}(\Delta,\Delta) \xrightarrow{\beta} \mathsf{App}(\Delta,\Delta)$ est une boucle qui se réécrit en elle-même, et donc calcule à l'infini.

3.4 β-redex

Définition 3.6 **Restriction au long de l'occurrence**

Chaque occurrence o d'un λ-terme M induit un λ-terme noté $M_{|o}$ appelé restriction de M aux occurrences sous o. $M_{|o}$ est défini par induction sur o :
— $M_{|\varepsilon} = M$
— $\mathsf{App}(M,N)_{|\mathsf{fun}\cdot o} = M_{|o}$
— $\mathsf{App}(M,N)_{|\mathsf{arg}\cdot o} = N_{|o}$
— $(\lambda x.M)_{|\mathsf{body}\cdot o} = M_{|o}$

Proposition 3.1

Chaque occurrence $o \in \mathsf{occ}(M)$ induit une fonction de concaténation

Définition 3.7 **β-redex**

Un β-redex est une paire (M,o) consistant en un λ-terme M et une occurrence $o \in \mathsf{occ}(M)$ telle que la restriction $M_{|o}$ est de la forme d'un "β-pattern" $\mathsf{App}(\lambda x.P, Q)$.

Tout β-redex induit une étape de β-réécriture $M \longrightarrow N$ où N est défini par $C[P[x := Q]]$ où C est un contexte, c'est-à-dire une substitution qui autorise la capture de variables.

3.5 η-règle

La η-règle fait que chaque λ-terme est une fonction.

Définition 3.8 **η-règle**

$M \underset{\eta\text{-règle}}{\longrightarrow} \lambda x.\mathsf{App}(\lambda x.M, N)$

Remarque 3.3

À partir de deux λ-termes M et N, on définit la composée de M et N, $M \circ N$, par $\lambda x.\mathsf{App}(M, \mathsf{App}(n,x))$. On peut de même définir la composée de k λ-termes. On note que si on fait plusieurs composées de 2 on va introduire plusieurs λ, mais les termes obtenus par composée de k termes et par composées de 2 termes seront équivalents à β-réduction près.

3.6 Turing-complétude du λ-calcul

Théorème 3.2

Le λ-calcul est Turing-complet.

4 λ-calcul simplement typé

On a un ensemble dénombrable $T\mathcal{V}$ de variables.

Définition 4.1 **Type simple**

Un type simple est défini par la grammaire

$$A ::= \alpha \in T\mathcal{V} \mid A \times B \mid A \Rightarrow B$$

Définition 4.2 **Contexte**

Un contexte est une suite finie $x_1 : A_1, ..., x_n : A_n$ de paires $x_i : A_i$ composée d'une variable et d'un type. On suppose que toutes les variables x_i sont différentes.

Définition 4.3 **Jugement de type**

Un jugement de type est un triplet $x_1 : A_1, ..., x_n : a_n \vdash M : B$ composé d'un contexte Γ, d'un λ-terme M et d'un type B, où toutes les variables libres de M sont dans Γ.

On veut montrer qu'un terme M a un type B dans un contexte Γ décrivant le type des variables libres de M.

Définition 4.4 **Arbre de dérivation**

Un arbre de dérivation est un arbre dont les branches sont labellisées par un jugement de type et dont les nœuds sont labellisés par des règles :

$$\frac{}{x : a \vdash x : A}\ \textsf{var}$$

$$\frac{\Gamma, x : a \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x.M : A \Rightarrow B}\ \textsf{lam}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash P : A}{\Gamma, \Delta \vdash \mathsf{App}(M, P) : B}\ \textsf{app}$$

On a aussi des règles d'affaiblissement et tout.

5 Lien entre λ-calcul et catégories

On est dans une catégorie cartésienne close.

Théorème 5.1

L'interprétation d'un λ-terme M donne un invariant du λ-terme modulo β-réduction et η-expansion.
Si $M \cong_{\beta\eta} N$ alors $[M] = [N]$

Preuve du théorème 5.1.

On fait de la chirurgie sur les arbres de dérivation.

cskifo

Définition 5.1 **Foncteur cartésien clos**

Un foncteur cartésien clos $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre deux catégories cartésiennes closes est un foncteur cartésien tel que tout morphisme canonique p_{A_1,A_2} est un isomorphisme.

Remarque 5.1

On a $F(A_1 \times A_2) \xrightarrow{\cong} F(A_1) \times F(A_2)$ et $F(A_1 \Rightarrow A_2) \xrightarrow{\cong} F(A_1) \Rightarrow F(A_2)$, mais encore mieux : ces isomorphismes sont obtenus en prenant des morphismes canoniques qui sont inversibles.

Théorème 5.2

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ?
Il existe une catégorie cartésienne close libre free-ccc($\mathcal{C}$) et un foncteur incl : $\mathcal{C} \to$ free-ccc($\mathcal{C}$).

Index des définitions

Index des résultats